

Università degli Studi di Padova  
Dottorato in Scienze Tecnologie e Misure Spaziali  
Indirizzo Astronautica e Scienze da Satellite

# **SISTEMA DI GUIDA MISSILISTICO BASATO SUL GPS**

Dottorando: Barato Francesco

Prof. Alessandro Caporali

A.A. 2010 – XXV Ciclo

## Sommario

|     |                                                              |    |
|-----|--------------------------------------------------------------|----|
| 1   | Introduzione .....                                           | 3  |
| 2   | Position Fix.....                                            | 4  |
| 2.1 | Modello matematico .....                                     | 4  |
| 2.1 | Errori geometrici.....                                       | 6  |
| 2.2 | Modello terrestre .....                                      | 8  |
| 3   | Calcolo del position fix tramite GPS Toolbox for Matlab..... | 8  |
| 3.1 | Input .....                                                  | 8  |
| 3.3 | Pseudorange .....                                            | 9  |
| 4   | Filtro di Kalman.....                                        | 10 |
| 4.1 | Modello matematico .....                                     | 10 |
| 4.2 | Filtro di Kalman per la navigazione INS/GPS .....            | 11 |
| 5   | Dinamica del missile .....                                   | 14 |
| 6   | Traiettoria in tempo reale di un Sounding Rocket .....       | 16 |
| 7   | Sistema di guida.....                                        | 21 |

# 1 Introduzione

In questo lavoro si è implementato un sistema di guida missilistico basato sull'uso del GPS. I sistemi di guida sono generalmente molto complessi, quello qui descritto rappresenta una versione preliminare sviluppata a scopo didattico. I sistemi di guida missilistici sono generalmente basati sulla navigazione inerziale. Un sistema di navigazione inerziale include almeno un calcolatore ed una piattaforma o modulo che contiene degli accelerometri, dei giroscopi, od altri dispositivi sensibili al moto. Il sistema è inizialmente fornito della sua velocità e posizione da un'altra sorgente (un operatore, un ricevitore satellitare GPS, etc.), e dopo di ciò calcola la sua posizione aggiornata e velocità integrando le informazioni che ha ricevuto dai sensori di moto. Il vantaggio di un sistema inerziale è quello di non necessitare di riferimenti esterni per determinare la sua posizione, il suo orientamento, o la sua velocità una volta che sia stato avviato. Tutti i sistemi di navigazione inerziale soffrono di deriva di integrazione: piccoli errori nelle misurazioni dell'accelerazione e nella velocità angolare vengono integrati in errori progressivamente maggiori nella velocità, che vengono aggravati in errori ancora maggiori nella posizione. Questo è un problema inerente ad ogni sistema di controllo ad anello aperto. La precisione di un sistema di navigazione di buona qualità è normalmente inferiore a 0,6 miglia nautiche per ora in posizione e dell'ordine di decimi di grado per ora nell'orientamento. La teoria dei controlli in generale ed il filtraggio Kalman in particolare forniscono la struttura teorica per la combinazione di informazioni provenienti da differenti sensori. Uno dei più comuni sensori alternativi è la radionavigazione satellitare GPS. L'introduzione del GPS ha portato a notevoli miglioramenti nei sistemi di navigazione. Un ricevitore GPS è uno strumento compatto e leggero, è in grado di fornire una misura di precisione e velocità tra le più affidabili e accurate tra i vari strumenti disponibili alla navigazione. Inoltre grazie all'utilizzo di un numero ridondante di satelliti è possibile una stima dell'errore di misura. Combinando opportunamente le informazioni dal sistema inerziale e dal sistema GPS, gli errori nella posizione e nella velocità sono valori GPS/INS numericamente stabili. Un errore, una volta che è stato generato, generalmente si propagherà attraverso il calcolo. Questo conduce al concetto (*qualitativo*) di stabilità numerica: un algoritmo si dice numericamente stabile se un errore, una volta che è stato generato, non cresce troppo durante il calcolo. Tramite un sistema GPS/INS è possibile combinare i vantaggi differenti del GPS e di sistemi inerziali. Il primo è esente da deriva mentre i secondi sono più accurati ed inoltre hanno una frequenza di acquisizione più elevata. In prima approssimazione si può dire che la guida è fornita dal sistema inerziale, il quale viene periodicamente aggiornato dai dati GPS. In questo modo non sono più necessarie le complesse e costosissime piattaforme inerziali stabilizzate di un tempo che dovevano possedere un bassissimo livello di drift. Grazie anche alla miniaturizzazione dei calcolatori sono oggi quindi disponibili compatte e leggere piattaforme strapdown in grado di fornire prestazioni elevate.

## 2 Position Fix

### 2.1 Modello matematico

Il sistema di calcolo della posizione consiste nella risoluzione di un sistema lineare (o per meglio dire, linea rizzato) di equazioni.

Le variabili in gioco sono 4 (3 per la posizione in 3D ed 1 per l'errore temporale), quindi questo è il numero minimo di satelliti che devono essere in vista e fornire informazioni. Se, come spesso accade, è presente un maggiore numero di dati si parla allora di minimizzazione.

Per ogni satellite viene inviata un'informazione di posizione (dove si trova il satellite in quel momento) e un'informazione temporale (in che istante è stata inviato il pacchetto dati). Tramite correlazione, si ottiene il tempo di volo del segnale.

L'equazione fondamentale per ogni satellite è dunque la seguente:

$$c(t_{sat} - t_{ric}) = \sqrt{(x_{sat} - x_{ric})^2 + (y_{sat} - y_{ric})^2 + (z_{sat} - z_{ric})^2}$$

Dove:

- $c$  = velocità della luce
- $t_{sat}$  = tempo di emissione del segnale dal satellite
- $t_{ric}$  = tempo di ricezione del segnale dal ricevitore
- $x_{sat}, y_{sat}, z_{sat}$  = posizione del satellite all'emissione (nota)
- $x_{ric}, y_{ric}, z_{ric}$  = posizione del ricevitore alla ricezione (incognita)

L'equazione precedente in pratica afferma che il tempo di volo del segnale moltiplicato per la velocità della luce (spazio percorso dal segnale ipoteticamente nel vuoto) è pari alla distanza tra satellite e ricevitore, e la soluzione è l'intersezione di 3 sfere ognuna centrata sul rispettivo satellite.

Come detto prima, gli orologi presenti all'interno dei satelliti sono di precisione molto superiore rispetto a quelli presenti nei classici ricevitori; i primi infatti hanno un errore di  $10^{-13}$  s/s, mentre gli orologi presenti nei dispositivi degli utenti (di costo nettamente inferiore) arrivano ad errori di  $10^{-6}$  s/s. Inoltre sono presenti degli errori sia nella determinazione della posizione, sia per il fatto che il segnale non viaggia nel vuoto.

Si ha dunque un errore nella determinazione del tempo di volo che viene considerato aggiungendo un ipotetico errore ( $\Delta t$ ) di sincronizzazione nell'equazione precedente, da calcolarsi come incognita, che viene così modificata:

$$c(t_{sat} - t_{ric}) = \sqrt{(x_{sat} - x_{ric})^2 + (y_{sat} - y_{ric})^2 + (z_{sat} - z_{ric})^2} + c\Delta t$$

Ecco dunque che si hanno 4 variabili, e sono richiesti dunque almeno 4 satelliti che inviino l'informazione.

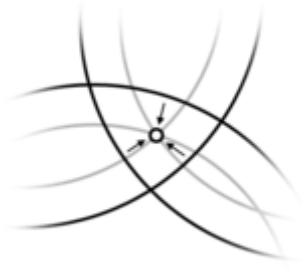


**Fig. 1 Incertezza nella determinazione della posizione**

L'equazione così fornita, però, è non lineare e non si presta ad una facile risoluzione. Per ovviare a questo inconveniente si utilizza l'espansione in serie di Taylor.

Supponiamo per semplicità di essere nel caso bidimensionale senza errore di sincronizzazione (l'estensione al caso generale è immediata).

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{(x_{sat} - x_{ric})^2 + (y_{sat} - y_{ric})^2} \\ d_2 = \dots \\ d_3 = \dots \end{cases}$$

Si ha che (Taylor):

$$d_1 = \hat{d}_1 + \left. \frac{\partial d_1}{\partial x_{ric}} \right|_{\hat{x}, \hat{y}} + \left. \frac{\partial d_2}{\partial y_{ric}} \right|_{\hat{x}, \hat{y}}$$

Dove il cappelletto indica una informazione ipotizzata attorno a cui sviluppare la soluzione (guess solution). Ovviamente, più questa sarà errata e più il solutore impiegherà tempo a calcolare la soluzione corretta. Ecco perché il funzionamento a freddo dei ricevitori (appena accesi) richiede un tempo di gran lunga superiore per il fix della propria posizione (minuti contro secondi).

Le varie derivate, valutate nell'intorno della guess solution, sono così definite.

$$\frac{\partial d_1}{\partial x_{ric}} = \frac{\partial}{\partial x_{ric}} \sqrt{(x_{sat} - x_{ric})^2 + (y_{sat} - y_{ric})^2} = \frac{x_{sat} - x_{ric}}{\sqrt{(x_{sat} - x_{ric})^2 + (y_{sat} - y_{ric})^2}} = cdir_{sat,x}$$

Analogamente per l'altra variabile. Ogni derivata, dunque, rappresenta i coseni direttori di un particolare satellite per una particolare direzione (X, Y o Z) rispetto ad una determinata posizione.

Linearizzando il sistema, è possibile trovare le incognite tramite il metodo denominato *Least Square* nel quale si minimizza la somma degli errori al quadrato. Questo metodo è il più diffuso per la sua semplicità ed anche perché è stato dimostrato che la soluzione è quella che minimizza gli errori nel caso questi abbiano una distribuzione gaussiana. Nel caso siano presenti errori di altro tipo (es. bias) risulta migliore utilizzare altri metodi, quali ad esempio Total Least Squares oppure LMedS (minimizzazione della mediana degli errori con sampling random degli elementi).

Esistono inoltre ulteriori metodi che non richiedono linearizzazione (ma una guess solution è sempre necessaria), il più famoso e semplice dei quali è Newton Rhapson multidimensionale. Anche in questo caso, se il numero di satelliti in vista è maggiore di 4 si richiede una minimizzazione ad esempio con il metodo *Non-linear Least Squares*.

## 2.1 Errori geometrici

Dilution of precision (DOP) o geometric dilution of precision è il termine utilizzato per indicare errori dovuti alla geometria della formazione dei satellite, ossia a come un utente vede la costellazione ed i satelliti che inviano informazioni in un dato momento. Alti valori di questo fattore indicano bassa accuratezza.

La seguente tabella mostra i valori e come leggerli:

| Valore | Classificazione | Descrizione                                                                                                                                                |
|--------|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | Ideale          | è il valore più elevato, da utilizzarsi per applicazioni che richiedono in ogni momento il massimo valore di precisione possibile.                         |
| 1-2    | Eccellente      | a questo livello di confidenza, le misure di posizione sono considerate sufficientemente accurate per rispondere ai requisiti delle applicazioni militari. |
| 2-5    | Buono           | rappresenta il livello di accuratezza minimo per applicazioni aziendali. Fornisce affidabili misure di posizione per la navigazione.                       |
| 5-10   | Moderato        | la qualità non è ottimale, una più ampia visuale del cielo è consigliata.                                                                                  |
| 10-20  | Discreto        | Basso livello di confidenza. Le misure di posizione possono essere utilizzate come guess solution.                                                         |
| >20    | Scarso          | A questo livello, le misure hanno un errore di 300m con un dispositivo con accuratezza di 6m.                                                              |

Il segnale di ogni satellite ha un livello di precisione; questi livelli di precisione possono essere combinati secondo uno schema che dipende dalla geometria della formazione: maggiormente i satelliti sono vicini, più l'incertezza è maggiore e l'accuratezza è minore. Questo fatto si può spiegare facendo il seguente esempio: considerando il metodo di calcolo della posizione, si considerino più sfere centrate in ogni satellite, ognuna con il relativo intervallo di incertezza (ogni superficie diventa una fascia).

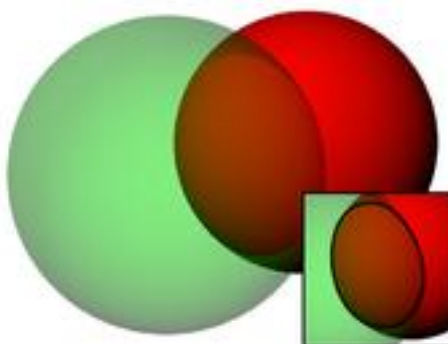


Fig. 2 Esempio di intersezione tra 2 dati GPS

Maggiore è l'angolo tra le 2 rette che congiungono ogni satellite con la posizione dell'utilizzatore, e minore sarà la zona di intersezione tra le 2 fasce, e dunque minore incertezza ci sarà sulla determinazione della posizione (basso valore di DOP). Il DOP può essere influenzato anche da altri fattori, quali la presenza di edifici o montagne nel campo di vista.

Il suo computo può essere diviso in 4 ulteriori coefficienti:

- HDOP: orizzontale
- VDOP: verticale
- PDOP: di posizione (3D)
- TDOP: temporale

Questa distinzione segue matematicamente da come viene calcolato il DOP, tramite gli elementi della matrice di covarianza dei parametri.

Per il calcolo si procede con il seguente schema, con la definizione di derivate e coseni direttori sopra mostrata, ponendo una formazione di 4 satelliti:

$$A = \begin{bmatrix} cdir_{1,x} & cdir_{1,y} & cdir_{1,z} & c \\ cdir_{2,x} & cdir_{2,y} & cdir_{2,z} & c \\ cdir_{3,x} & cdir_{3,y} & cdir_{3,z} & c \\ cdir_{4,x} & cdir_{4,y} & cdir_{4,z} & c \end{bmatrix}$$

$$Q = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} d_x^2 & d_{xy}^2 & d_{xz}^2 & d_{xt}^2 \\ d_{yx}^2 & d_y^2 & d_{yz}^2 & d_{yt}^2 \\ d_{zx}^2 & d_{zy}^2 & d_z^2 & d_{zt}^2 \\ d_{tx}^2 & d_{ty}^2 & d_{tz}^2 & d_t^2 \end{bmatrix}$$

$$PDOP = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$HDOP = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$$

$$VDOP = \sqrt{d_z^2}$$

$$TDOP = \sqrt{d_t^2}$$

$$GDOP = \sqrt{PDOP^2 + TDOP^2}$$

Da notare che HDOP e VDOP, a differenza degli altri fattori, dipendono dal sistema di riferimento scelto.

## 2.2 Modello terrestre

Per il calcolo della posizione è necessario conoscere un modello della superficie terrestre sufficientemente accurato. Il software *GPS Toolbox for Matlab* utilizza il modello WGS84.

WGS84 è l'acronimo di World Geodetic System 1984 e definisce il sistema come geodetico, mondiale, riferito al 1984.

Esso costituisce un modello matematico della Terra da un punto di vista geometrico, geodetico e gravitazionale, costruito sulla base delle misure e delle conoscenze scientifiche e tecnologiche disponibili al 1984.

I *datum* della geodesia classica, che possono essere definiti locali o regionali, approssimano bene il geoide solo in un intorno del punto di emanazione, mentre il datum globale WGS84 utilizza lo standard EGM96 (modello geopotenziale della superficie terrestre costituito da una somma di armoniche sferiche fino al 360° ordine e grado), che approssima il geoide nel suo complesso ed è valido per tutto il mondo.

## 3 Calcolo del position fix tramite GPS Toolbox for Matlab

Per il calcolo della posizione del ricevitore a bordo del missile si è ricorsi ad un processo iterativo:

1. si decide la posizione della stazione e l'istante temporale in cui avviene la ricerca
2. si osservano i satelliti in vista
3. si calcola/decide l'errore da inserire nelle misure di pseudorange
4. si ricalcola la posizione del ricevitore
5. si confrontano i dati con quelli di partenza

### 3.1 Input

Viene richiesto di impostare il percorso (*path*) in cui si trovano i programmi del *GPS Toolbox for Matlab*.

Inoltre è richiesto un almanacco dei dati dei satelliti che includono:

- ID
- Stato di salute del satellite
- Eccentricità
- Tempo di applicabilità [s]
- Inclinação [rad]
- Velocità dell'ascensione retta [rad/s]
- $\sqrt{A}$  [ $\text{m}^{0.5}$ ]
- Ascensione retta iniziale [rad]
- Argomento di perigeo [rad]
- Anomalia media [rad]
- Af0 [s]
- Af1 [s]
- Settimana

Tutti questi parametri si possono scaricare da internet all'indirizzo

<http://www.navcen.uscg.gov/archives/>

ma hanno un formato non valido per l'utilizzo del toolbox. Un esempio è il seguente:

\*\*\*\*\* Week 532 almanac for PRN-01 \*\*\*\*\*

ID: 01  
Health: 063  
Eccentricity: 0.3822326660E-002  
Time of Applicability(s): 589824.0000  
Orbital Inclination(rad): 0.9624443054  
Rate of Right Ascen(r/s): -0.7785274647E-008  
SQRT(A) (m 1/2): 5153.624512  
Right Ascen at Week(rad): 0.9005916119E+000  
Argument of Perigee(rad): 0.975319982  
Mean Anom(rad): 0.9247362614E-001  
Af0(s): -0.6294250488E-004  
Af1(s/s): -0.3637978807E-011  
week: 532

Per ogni satellite sono presenti i dati precedenti sullo stesso file. Ogni file è valido 1 settimana, e sono presenti i file a partire dal 1997.

Il formato richiesto dal toolbox invece è una matrice senza caratteri testuali, in cui in ogni riga è indicato un satellite diverso ed in ogni colonna è indicato un parametro diverso. Tramite il codice riportato in appendice (file *gmp\_alm\_format.m*) è possibile convertire i file per poterli impiegare tramite il toolbox.

Altri input da impostare sono la velocità della luce, il tempo di partenza (in s, da inizio settimana) della simulazione e l'angolo di elevazione limite per decidere se un satellite sia in vista o meno.

In seguito, tramite il file *tadmsrad.m* vengono convertiti gli angoli da gradi a radianti, mentre con il file *tgdecef.m* la posizione espressa in coordinate geodetiche viene convertita in coordinate ECEF.

### 3.3 Pseudorange

Per il calcolo dello pseudorange si è ricorsi al codice in *pradr.m*.

Il input richiede la posizione dei vari satelliti (bisogna stare attenti perché non fa un controllo su quelli in vista o meno) e del ricevitore. È possibile tramite la variabile flag impostare il conto di varie fonti di incertezza quali:

- Correzione ionosferica
- Correzione troposferica
- Correzione per multipath
- Correzione per la rotazione della Terra
- Inserimento di un errore random nella misura dello pseudorange

In base alla possibilità o meno di poter correggere tutti questi effetti (ad esempio con l'uso di entrambe le portanti L1 ed L2) l'errore nella misura della posizione può variare da decine di metri fino a qualche metro. Nel caso di utilizzo del GPS differenziale con misure di fase l'errore può arrivare addirittura all'ordine dei centimetri. Noti i vari pseudorange è possibile stimare la posizione del missile con il metodo dei minimi quadrati.

## 4 Filtro di Kalman

### 4.1 Modello matematico

Il **filtro di Kalman** è un efficiente filtro ricorsivo che valuta lo stato di un sistema dinamico a partire da una serie di misure soggette a rumore. Per le sue caratteristiche intrinseche è un filtro ottimo per rumori e disturbi agenti sul sistema gaussiani a media nulla. Il filtro di Kalman è in grado di integrare le informazioni sul modello del processo con quelle ottenute da vari strumenti di misura. Grazie al filtraggio di Kalman è possibile ottenere un'informazione stabile e più accurata di quelle ottenute dai singoli sensori.

Il filtro di Kalman cerca di stimare in presenza di disturbi lo stato interno  $x \in Re^n$ , non accessibile, di un sistema tempo discreto completamente conosciuto del tipo

$$x_k = \mathbf{A}x_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1} + w_{k-1} \quad (1)$$

dove è disponibile una osservazione del sistema  $z \in Re^n$ , nella forma

$$z_k = \mathbf{H}x_k + v_k \quad (2)$$

Le variabili  $w_k$  e  $v_k$  rappresentano rispettivamente il rumore di processo e di osservazione, di valor medio nullo e varianza rispettiva  $Q$  e  $R$  conosciute, e solitamente la stima di  $Q$  risulta molto più difficile della stima di  $R$ .

$\mathbf{A}$  è una matrice  $n \times n$  di transizione dello stato,  $\mathbf{B}$  è una matrice  $n \times l$  che collega l'ingresso di controllo opzionale  $u \in Re^l$  con lo stato  $\mathbf{x}$  e infine  $\mathbf{H}$  è una matrice  $m \times n$  che collega lo stato con la misura  $z_k$ . Tutte queste matrici devono essere conosciute.

Il filtro di Kalman è un filtro di stima ricorsivo e richiede lo stato stimato dal passo precedente  $\hat{x}_{k-1}$  e la corrente osservazione  $z_k$  del sistema. Definiamo  $\hat{x}_k^-$  la stima *a priori* dello stato del sistema, basata sulle variabili ottenute al tempo  $k-1$  e  $\hat{x}_k$  la stima dello stato del problema *a posteriori* basata anche sull'osservazione  $z_k$ . È possibile definire l'errore della stima a posteriori come

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (3)$$

L'obiettivo del filtro di Kalman è minimizzare la covarianza dell'errore a posteriori:

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (4)$$

e fornire un metodo per ottenere la stima di  $\hat{x}_k$  data la stima a priori  $\hat{x}_k^-$  e l'osservazione  $z_k$  nella forma

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \mathbf{K}(z_k - \mathbf{H}\hat{x}_k^-) \quad (5)$$

La differenza  $z_k - \mathbf{H}\hat{x}_k^-$  è chiamato *residuo* e rappresenta la discrepanza tra l'osservazione predetta e quella realmente avvenuta.

Il filtro di Kalman normalmente viene presentato in due fasi: aggiornamento del tempo e aggiornamento della misura. Nella prima fase si ottiene la stima a priori sia di  $\hat{x}_k$  che della covarianza predetta  $P_k^-$ .

La stima a priori viene dalla conoscenza della dinamica del sistema 1 :

$$\hat{x}_k^- = \mathbf{A}\hat{x}_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1} \quad (6)$$

e viene aggiornata la stima a priori della covarianza dell'errore:

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (7)$$

Nella seconda fase viene calcolato il guadagno  $K_k$  che minimizza la covarianza a posteriori:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (8)$$

e con questa viene aggiornato lo stato a posteriori attraverso l'equazione 5. Infine viene calcolata la stima a posteriori dell'errore di covarianza:

$$P_k = (I - K_k H) P_k^-$$

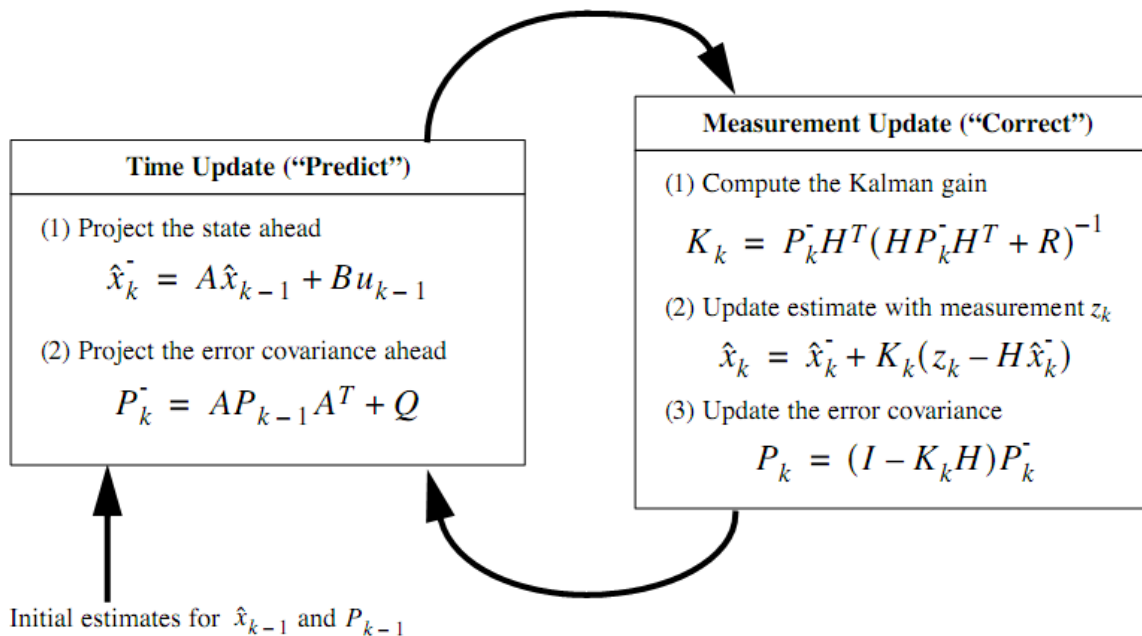


Fig.4 Funzionamento del filtro di Kalman

## 4.2 Filtro di Kalman per la navigazione INS/GPS

Esiste un'estesa letteratura riguardante l'utilizzo del filtro di Kalman per l'integrazione delle misure nella navigazione inerziale. Sono stati ideati diversi metodi che si distinguono per complessità e performance. In questo lavoro si è deciso di utilizzare un filtro di Kalman diretto lineare. In questo filtro vengono propagate la posizione e la velocità del velivolo mentre le misure di accelerazione vengono considerate come variabile di controllo del processo. Viene tenuto conto dei drift dei giroscopi e dei bias degli accelerometri. I guadagni corrispondenti a queste variabili vengono fissati a priori. Questo filtro risulta più semplice e meno oneroso dal punto di vista computazionale rispetto ad altri dotati invece di maggior complessità e necessità di risorse ma che risultano generalmente più performanti. Il filtro considera che le informazioni ottenute dalle misure satellitari siano aggiornate con una frequenza differente (1 Hz) rispetto a quella degli accelerometri e giroscopi (100 Hz). Il rapporto tra le due frequenze è pari ad  $N$ .

Nel nostro filtro di Kalman il vettore di stato consiste di 14 elementi:

$$\xi = [\mathbf{x}^T \ b \ \dot{\mathbf{x}}^T \ \dot{b} \ (\Delta \mathbf{f}_1^e)^T \ (\Delta \mathbf{f}_2^e)^T]^T$$

Dove  $\mathbf{x}$  è il vettore posizione,  $b$  è il bias dell'orologio del ricevitore GPS,  $\Delta f_1^e$  è il vettore degli errori sulle accelerazioni dovuto al bias degli accelerometri e  $\Delta f_2^e$  è il vettore degli errori sulle accelerazioni dovuto al drift dei giroscopi. L'equazione della dinamica del sistema sarà:

$$\xi_{l+1} = \mathbf{A}_l \xi_l + \mathbf{B}_l \mathbf{u}_l + \mathbf{w}_l$$

La matrice  $\mathbf{A}$  è così costituita:

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

con

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \delta T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \delta T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \delta T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \delta T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta T & 0 & 0 & \Delta T^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta T & 0 & 0 & \Delta T^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T & 0 & 0 & \Delta T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22}^* = \begin{bmatrix} c_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & c_2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{cases} \mathbf{A}_{12}^*, & \text{if } l = mN \\ \mathbf{0}_{8 \times 6}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{cases} \mathbf{A}_{22}^*, & \text{if } l = mN \\ \mathbf{0}_{6 \times 6}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\delta T$  è il periodo di campionamento e  $\Delta T = N\delta T$ .

$c_1$  e  $c_2$  sono i forgetting rates per gli errori dovuti ai bias di accelerometri e giroscopi. La matrice  $B$  lega il vettore di stato alla variabile di controllo (le misure di accelerazione):

$$\mathbf{B}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \delta T \\ \mathbf{0}_{7 \times 3} \end{bmatrix}$$

L'equazione delle misurazioni sarà:

$$\mathbf{Z}_l = \mathbf{C}_l^T \xi_l + \mathbf{v}_l$$

dove

$$\mathbf{C}_l^T = \begin{cases} [\mathbf{I}_{8 \times 8} & \mathbf{0}_{8 \times 6}] & \text{for } l = mN \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathbf{Z}_l$  sono le posizioni, velocità e l'errore dell'orologio del ricevitore ottenute dalle misurazioni GPS.

La procedura per aggiornare il vettore di stato è la seguente:

$$\begin{aligned} \text{Initialization} \quad & \tilde{\xi}_{l-1/l-1} = \xi_0 \\ & \mathbf{p}_{l-1/l-1} = \mathbf{p}_0 \\ \text{Prediction} \quad & \hat{\xi}_{l/l-1} = \mathbf{A}_{l-1} \hat{\xi}_{l-1/l-1} + \mathbf{B}_{l-1} \mathbf{u}_{l-1} \\ & \mathbf{p}_{l/l-1} = \mathbf{A}_{l-1} \mathbf{p}_{l-1/l-1} \mathbf{A}_{l-1}^T + \mathbf{Q}_{l-1} \\ & \mathbf{k}_l = \mathbf{p}_{l/l-1} \mathbf{c}_l [\mathbf{c}_l^T \mathbf{p}_{l/l-1} \mathbf{c}_l + \mathbf{R}_l]^{-1} \\ & \mathbf{p}_{l/l} = [\mathbf{I} - \mathbf{k}_l \mathbf{c}_l^T] \mathbf{p}_{l/l-1} \\ \text{Update} \quad & \hat{\xi}_{l/l} = \hat{\xi}_{l/l-1} + \mathbf{K}_l [\mathbf{Z}_l - \mathbf{C}_l^T \hat{\xi}_{l/l-1}] \\ & \mathbf{K}_l = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_l \\ (\mathbf{kfix})_{6 \times 8} \end{bmatrix}, & \text{if } l = mN \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{p}$  è la matrice di covarianza,  $\mathbf{k}$  il guadagno del filtro e  $\mathbf{c}$  la matrice delle osservazioni:

$$\mathbf{c}_l = \begin{cases} \mathbf{I}_{8 \times 8} & \text{for } l = mN \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbf{kfix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & g_1 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & g_2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{kfix}$  è la matrice dei guadagni (fissati) dei 6 bias e drift ed è uno dei parametri di design del filtro. Le costanti  $g_1$  e  $g_2$  vanno tarate in funzione delle caratteristiche degli strumenti inerziali e dalle performance che si vogliono ottenere dal filtro (accuratezza, robustezza etc...).

## 5 Dinamica del missile

Per semplicità in questo lavoro la dinamica del missile è stata considerata solamente in due dimensioni.

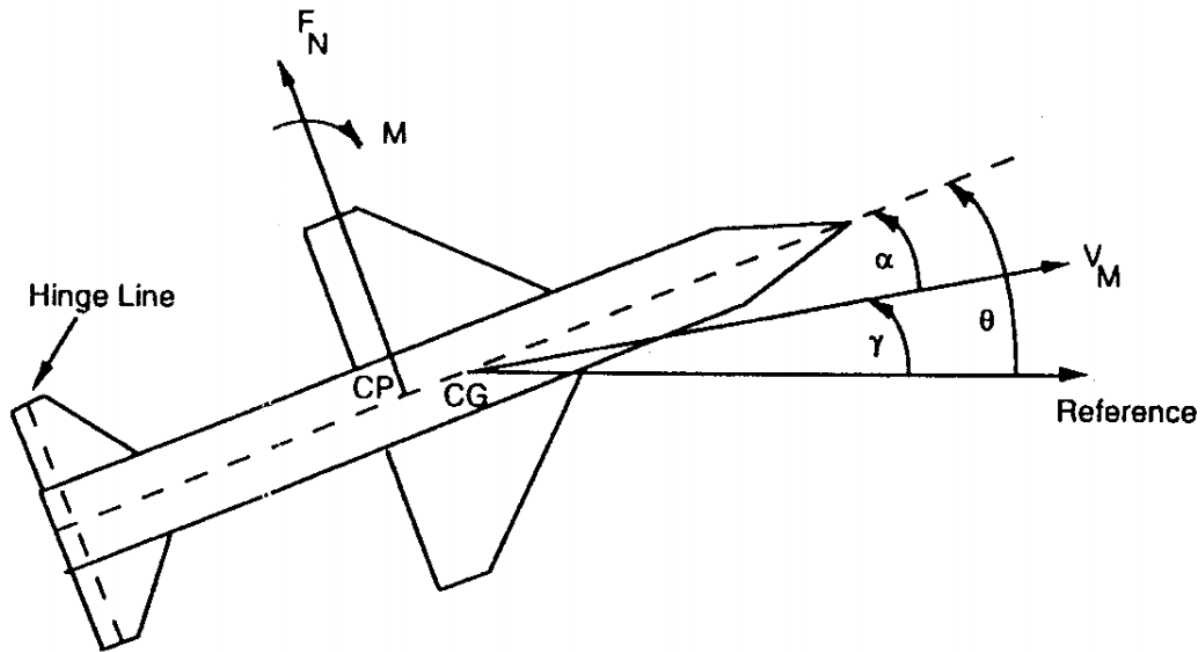


Fig. 4 Missile e sistemi di riferimento

Le equazioni della dinamica traslazionale sono:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= F_x/m & \ddot{y} &= F_y/m \\ F_x &= T \cos \vartheta - F_N \sin \vartheta - F_D \cos \vartheta \\ F_y &= T \sin \vartheta + F_N \sin \vartheta - F_D \cos \vartheta\end{aligned}$$

Con  $m$  la massa del missile e  $T$  la spinta del motore. Nel caso che  $y$  sia la direzione verticale bisogna aggiungere anche la forza peso  $mg$ .

L'angolo  $\vartheta$  è pari alla somma dell'*angolo d'attacco*  $\alpha$  e del *flight path angle*  $\gamma$ :

$$\vartheta = \alpha + \gamma$$

La forza aerodinamica normale all'asse del velivolo è:

$$F_N = Q S_{ref} C_N$$

mentre la forza longitudinale per piccoli angoli d'attacco sarà pari a quella di drag:

$$F_D = Q S_{ref} C_D$$

$C_D$  è una funzione del numero di Mach  $Ma$ , dell'angolo d'attacco stesso e della geometria del velivolo.

$Q$  è la pressione dinamica:

$$Q = 0.5\rho V_M^2$$

$S_{ref}$  è una superficie di riferimento (l'area frontale del missile):

$$S_{ref} = \frac{\pi d^2}{4}$$

Il coefficiente di forza normale  $C_N$  è pari a:

$$C_N = 2\alpha + \frac{1.5S_{plan}\alpha^2}{S_{ref}} + \frac{8S_w\alpha}{\beta S_{ref}} + \frac{8S_t(\alpha + \delta)}{\beta S_{ref}}$$

$S_{plan}$  = superficie in pianta del missile

$S_w$  = superficie delle ali

$S_t$  = superficie delle alette di coda

$$\beta = \sqrt{abs(Ma^2 - 1)}$$

$\delta$  è l'angolo di rotazione delle alette di coda

L'equazione della dinamica rotazionale è la seguente:

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{I} = \frac{Q S_{ref} C_M d}{I}$$

Dove  $I$  è il momento di inerzia ed  $M$  è la coppia rispetto al centro di gravità del missile:

$$M = Q S_{ref} C_M d$$

Con il coefficiente di momento  $C_M$  pari a:

$$C_M = \frac{2\alpha(x_{CG} - x_{CPN})}{d} + \frac{1.5S_{plan}\alpha^2(x_{CG} - x_{CPB})}{S_{ref}d} + \frac{8S_w\alpha(x_{CG} - x_{CPW})}{\beta S_{ref}d} + \frac{8S_t(\alpha + \delta)(x_{CG} - x_{HL})}{\beta S_{ref}d}$$

Le varie lunghezze  $x$  sono indicate nella figura seguente.

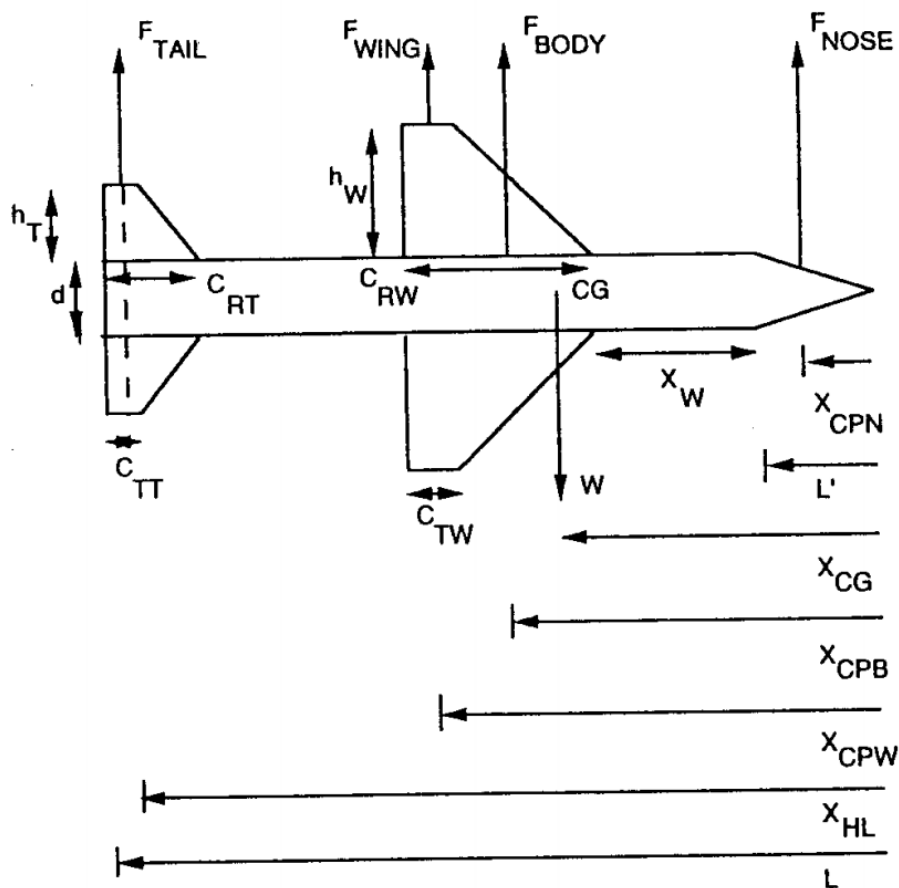


Fig. 5 Geometria del missile

## 6 Traiettoria in tempo reale di un Sounding Rocket

Per analizzare l'efficacia del filtro di Kalman applicato alla guida GPS/INS è stata simulato il volo di un sounding rocket per applicazioni scientifiche. Il razzo viene propulso nelle prime fasi del volo e successivamente compie una traiettoria parabolica in volo libero. Il razzo è spinnato e quindi viene considerato insensibile ai disturbi ambientali. Per quanto riguarda l'accuratezza degli strumenti il segnale Gps è di 30 m sulla posizione e di 0.5 m/s in quella di velocità. La velocità è misurata tramite misure di pseudorange rate sfruttando l'effetto Doppler. Agli accelerometri è stato attribuito un errore random con varianza di  $0.1 \text{ m/s}^2$  più un bias costante pari a  $0.025 \text{ m/s}^2$ .

Nelle figure seguenti è possibile notare come l'utilizzo del filtro di Kalman consenta di ottenere una stima della posizione e della velocità ad una frequenza superiore a quella del segnale GPS e inoltre contrassegnata da una varianza sensibilmente inferiore dei dati. Rispetto invece al segnale dato dagli accelerometri è evidente come l'utilizzo dell'integrazione del filtro con i dati dei GPS impedisca il drift della stima di posizione che si avrebbe utilizzando unicamente la piattaforma inerziale.

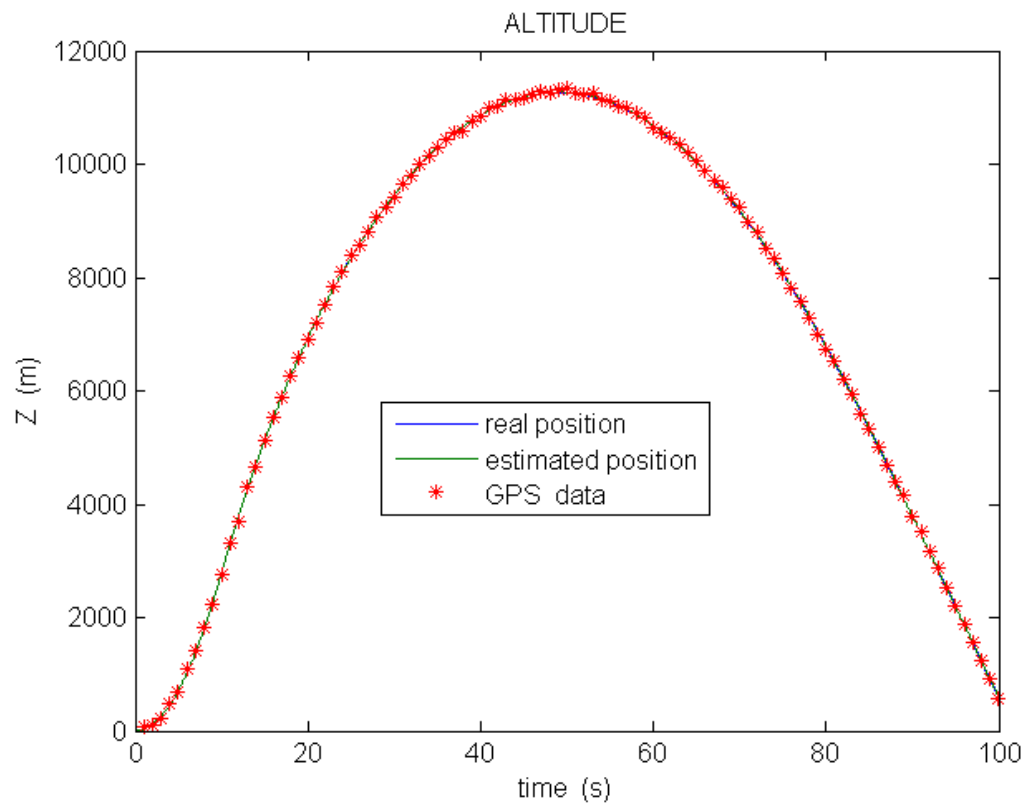


Fig. 6 Altitudine del Sounding Rocket

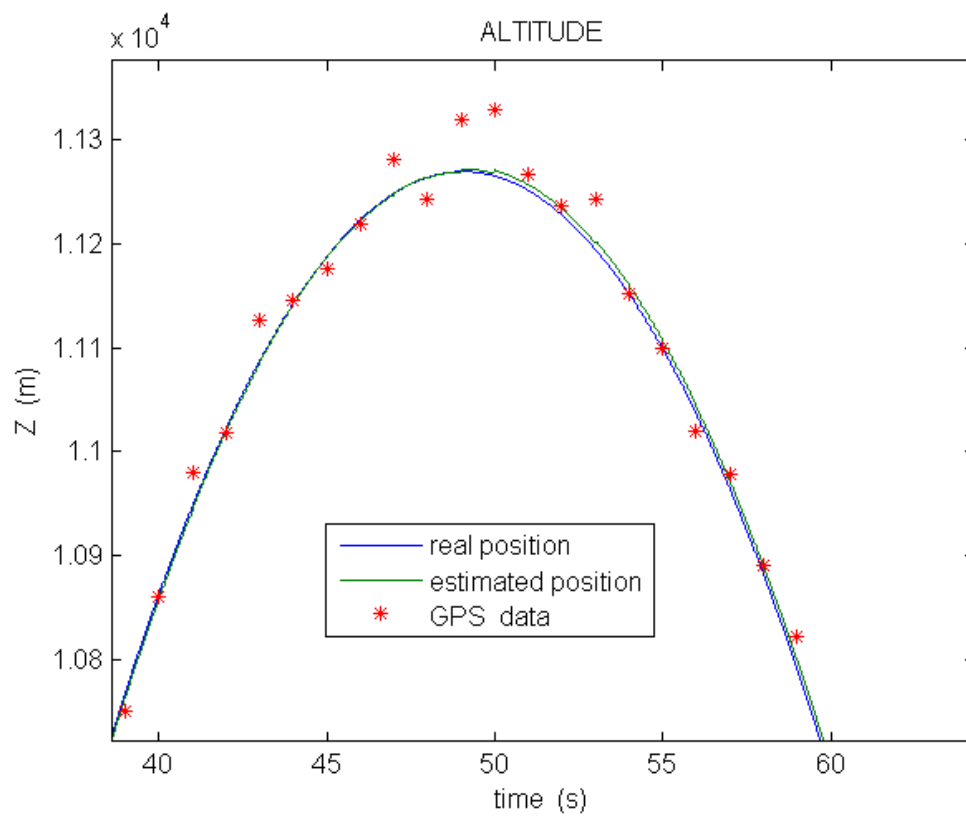


Fig. 7 Altitudine del Sounding Rocket, ingrandimento.

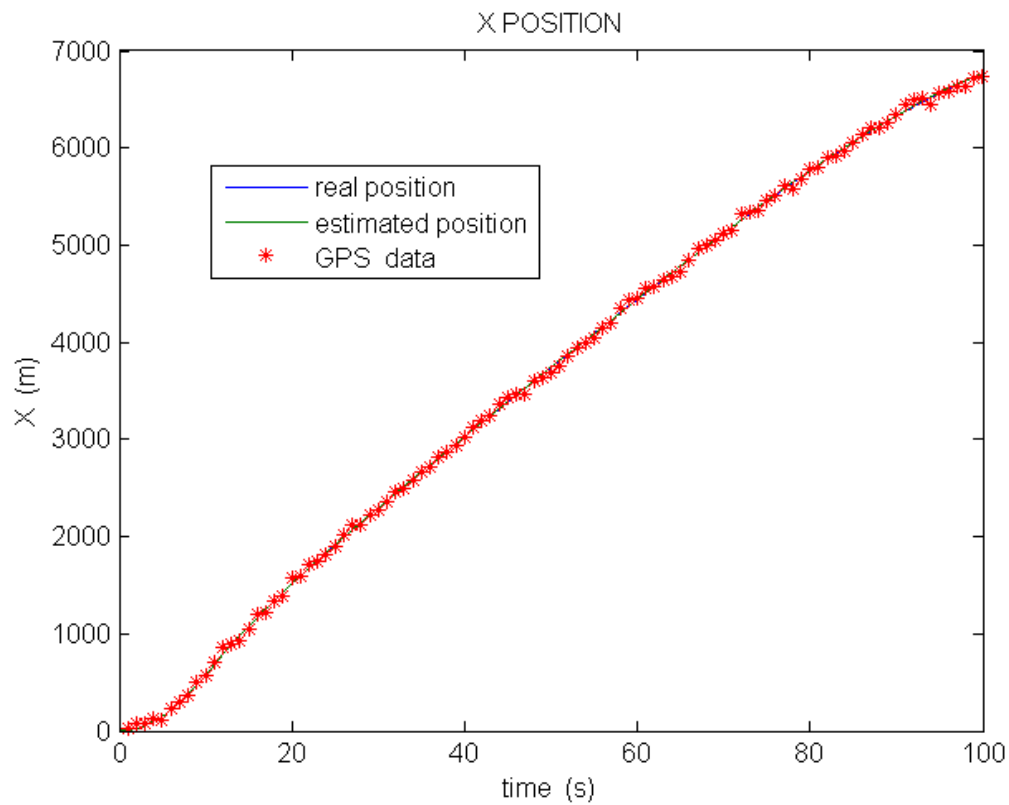


Fig. 8 Slant Range del Sounding Rocket

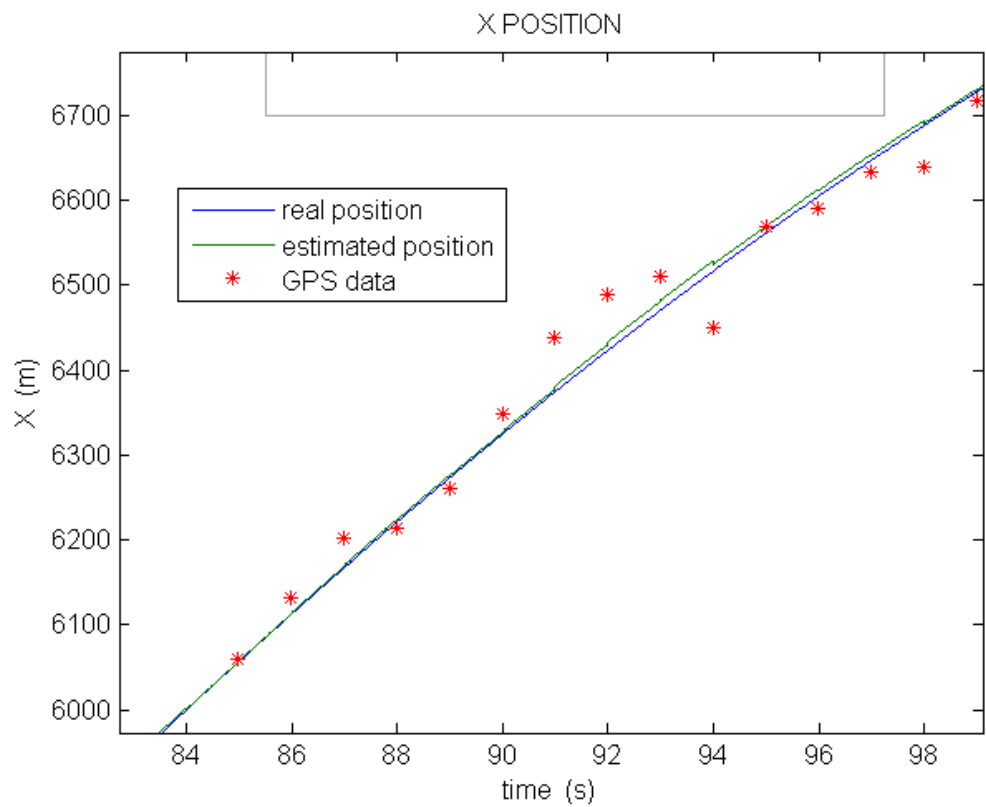


Fig. 9 Slant Range del Sounding Rocket, ingrandimento

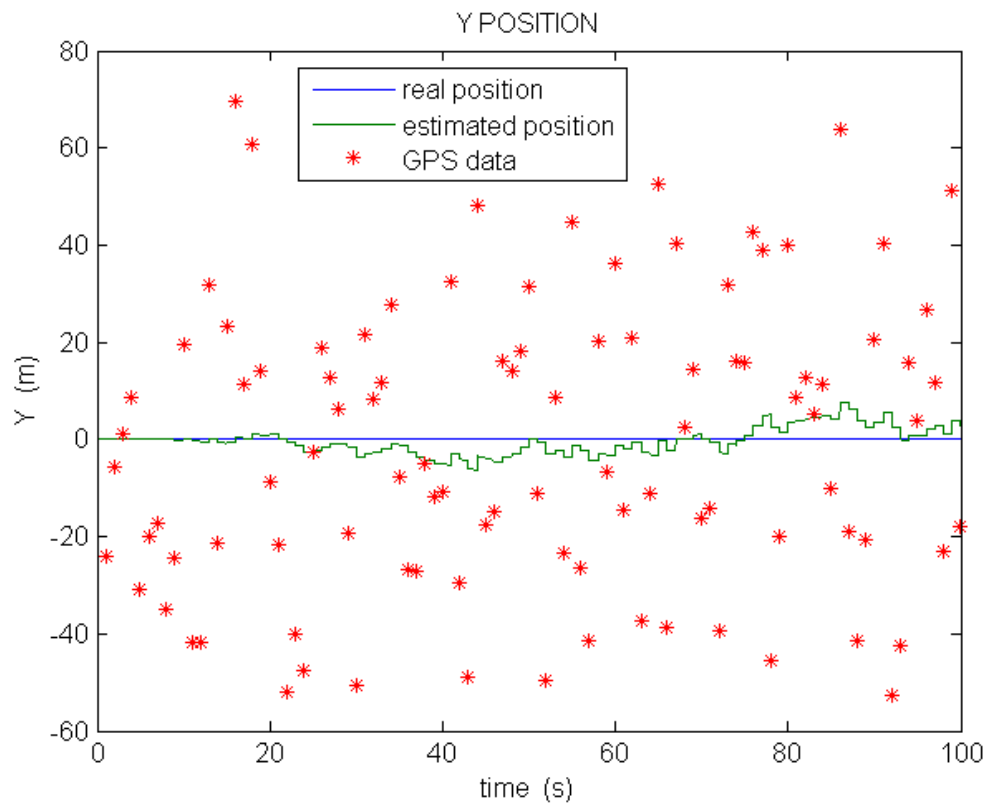


Fig. 10 Coordinata Y del Sounding Rocket

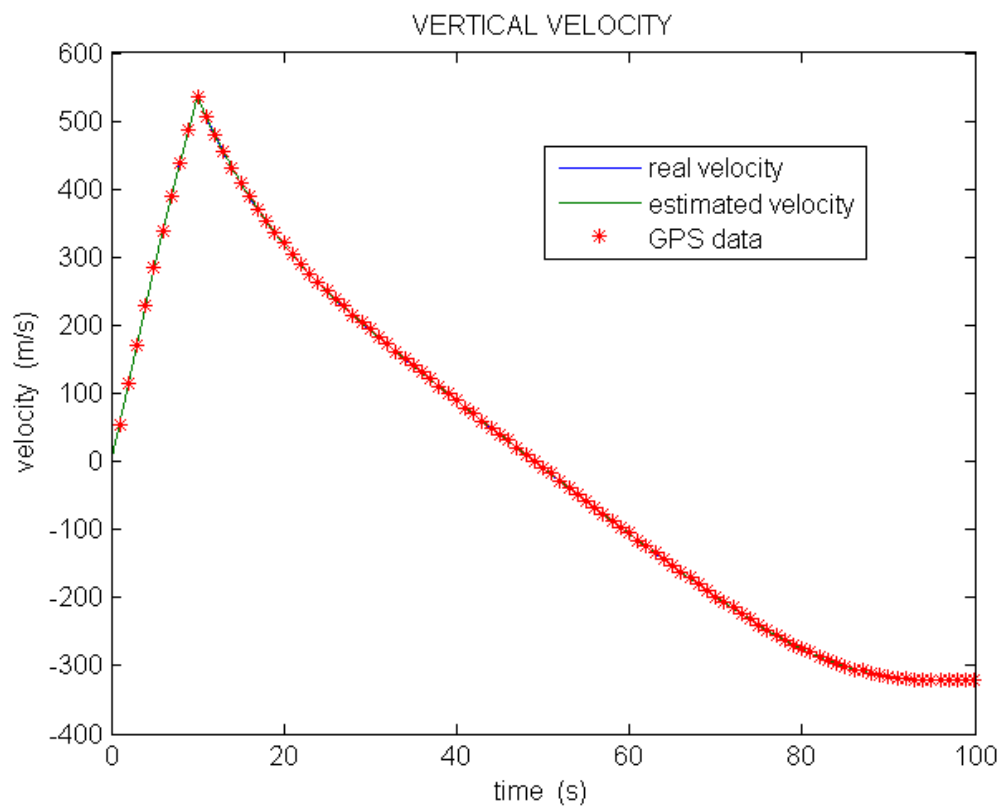


Fig. 11 Velocità ascensionale del Sounding Rocket

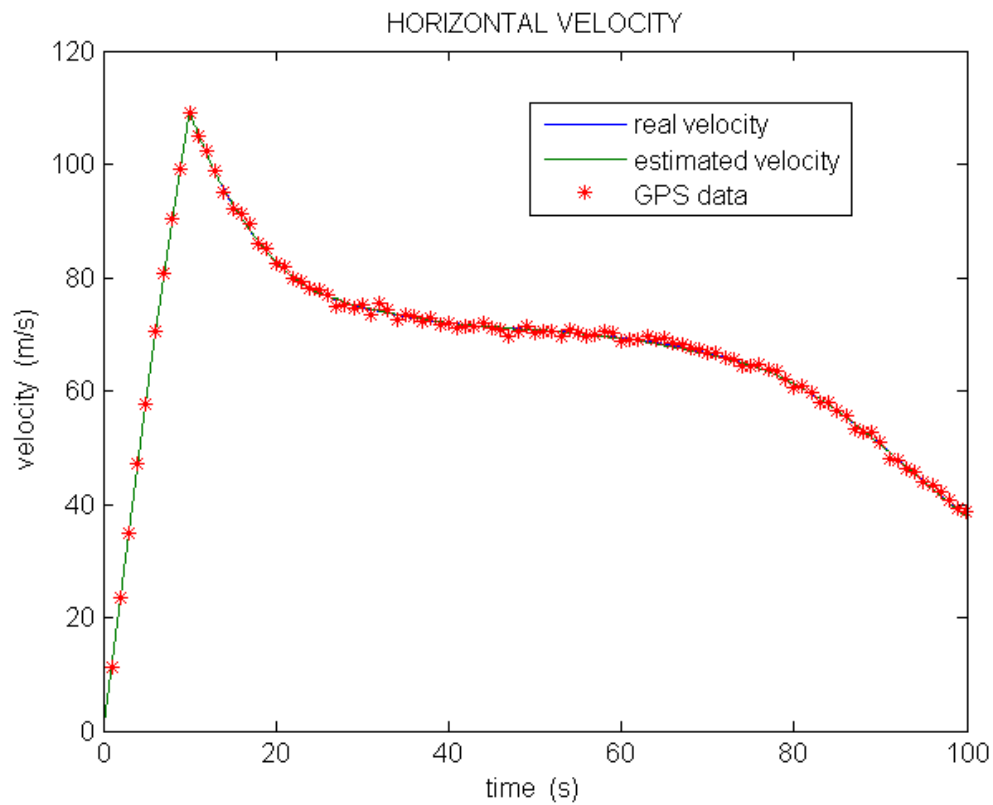


Fig. 12 Velocità orizzontale del Sounding Rocket

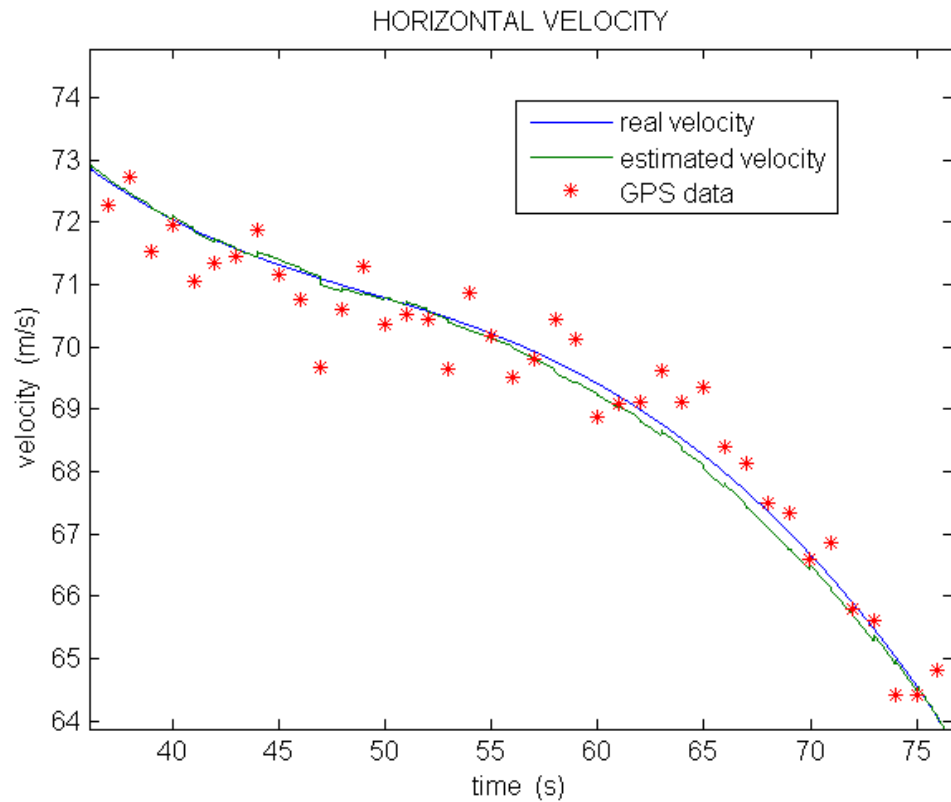


Fig. 13 Velocità orizzontale del Sounding Rocket, ingrandimento

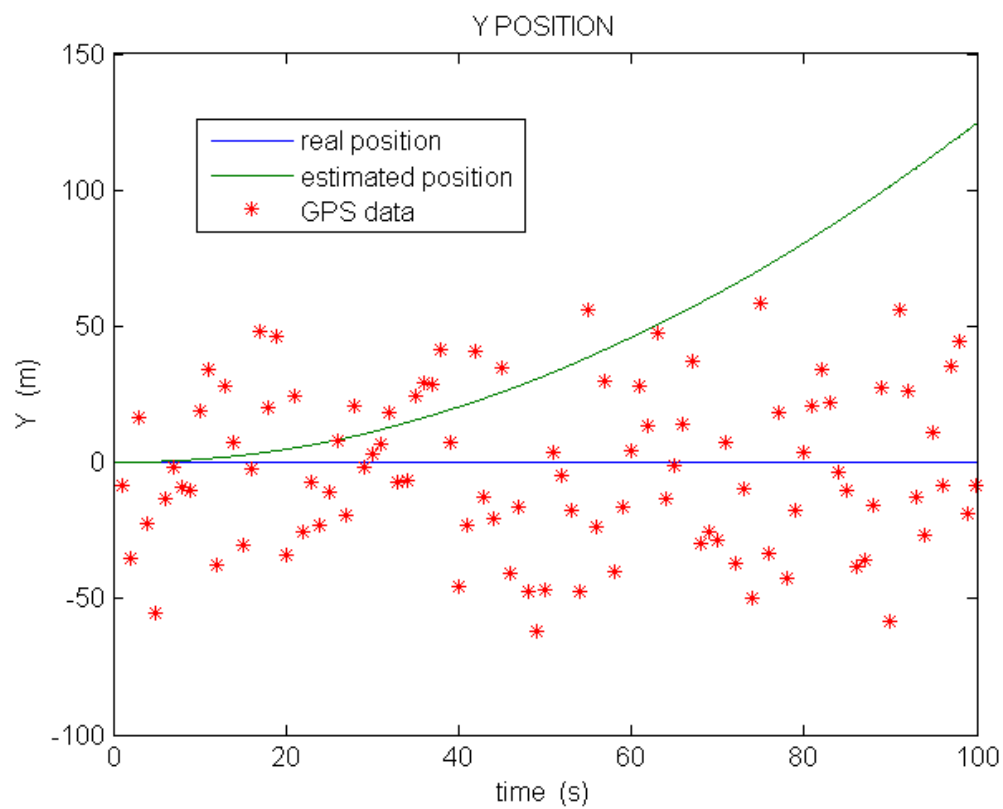


Fig. 14 Posizione del sounding rocket stimata solo con l'uso degli accelerometri

## 7 Sistema di guida

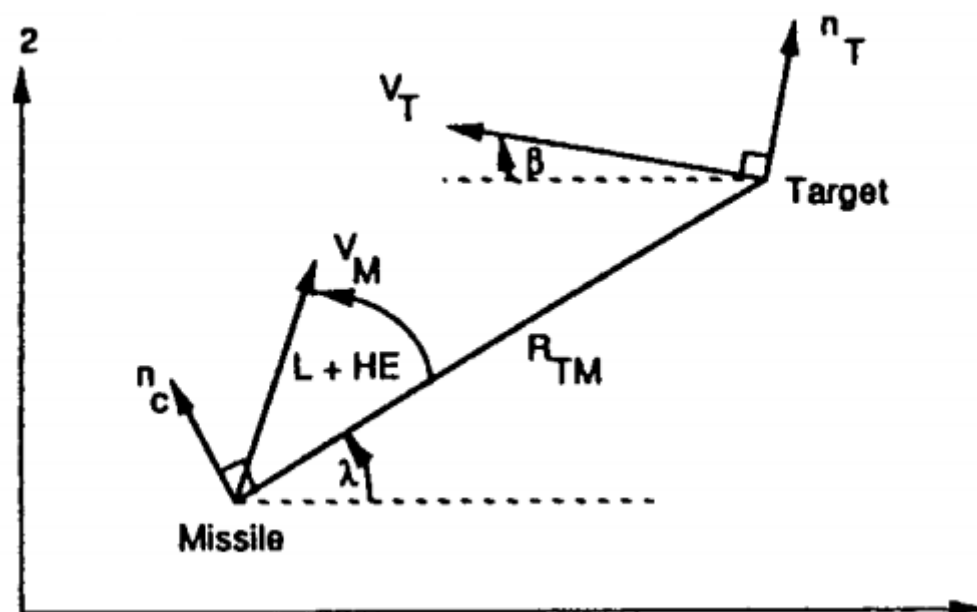


Fig. 15 Geometria 2D dell'ingaggio missile-target

Nel programma è stato successivamente implementato un sistema di guida a comando proporzionale. Questa legge di guida prevede che venga imposta al missile una accelerazione normale (quella che fa curvare la traiettoria) proporzionale alla velocità di variazione dell'angolo della linea di vista  $\dot{\lambda}$ :

$$n_c = \mu V_c \dot{\lambda}$$

con  $\mu$  costante di proporzionalità (in genere pari a 3-5) e  $V_c$  velocità di avvicinamento al target. Questo è il più semplice sistema di guida esistente. Per imporre al missile l'accelerazione voluta il sistema impone alle alette di coda una deflessione pari a:

$$\delta = n_c / K_1$$

Dove con  $K_1$  si è considerata la relazione tra movimento delle alette ed accelerazione ottenuta in condizioni statiche. In realtà la relazione tra deflessione delle alette di coda e l'accelerazione normale è più complessa ed ha una sua dinamica, dunque l'accelerazione ottenuta sarà differente da quella richiesta. Per far seguire al missile una determinata traiettoria si definiscono una serie di target statici chiamati waypoints. Il missile cercherà quindi di intercettare di volta in volta il waypoint selezionato.

Si è deciso di simulare il volo di un missile soggetto ad una accelerazione laterale di disturbo pari a  $1 \text{ m/s}^2$ .

Nelle figure seguenti è possibile vedere il confronto tra il sistema dotato del sistema di controllo ed uno invece lasciato con le superfici aerodinamiche fisse. Si può notare come in assenza del sistema di guida il missile, sottoposto all'accelerazione di disturbo devii sensibilmente la traiettoria e finisca completamente fuori posizione. Al contrario il missile dotato di sistema di guida si mantiene lungo la traiettoria di riferimento pur muovendosi attorno ad essa. Il sistema di guida a comando proporzionale non è smorzato ed inoltre le caratteristiche aerodinamiche del missile non sono state ottimizzate per le condizioni di volo dunque il sistema risulta debolmente stabile. Inoltre gli errori nella determinazione della posizione si accoppiano con le problematiche del sistema di guida rendendo il volo poco confortevole. I sistema di guida che vengono impiegati nella realtà risultano generalmente molto più elaborati di quello presentato in questo lavoro. Inoltre anche il design del missile richiede una cura particolare.

Quello che però interessava in questo lavoro era semplicemente illustrare le funzionalità di base della catena formata dalle misurazioni, dall'integrazione dei dati e dal loro utilizzo nel controllo del velivolo.

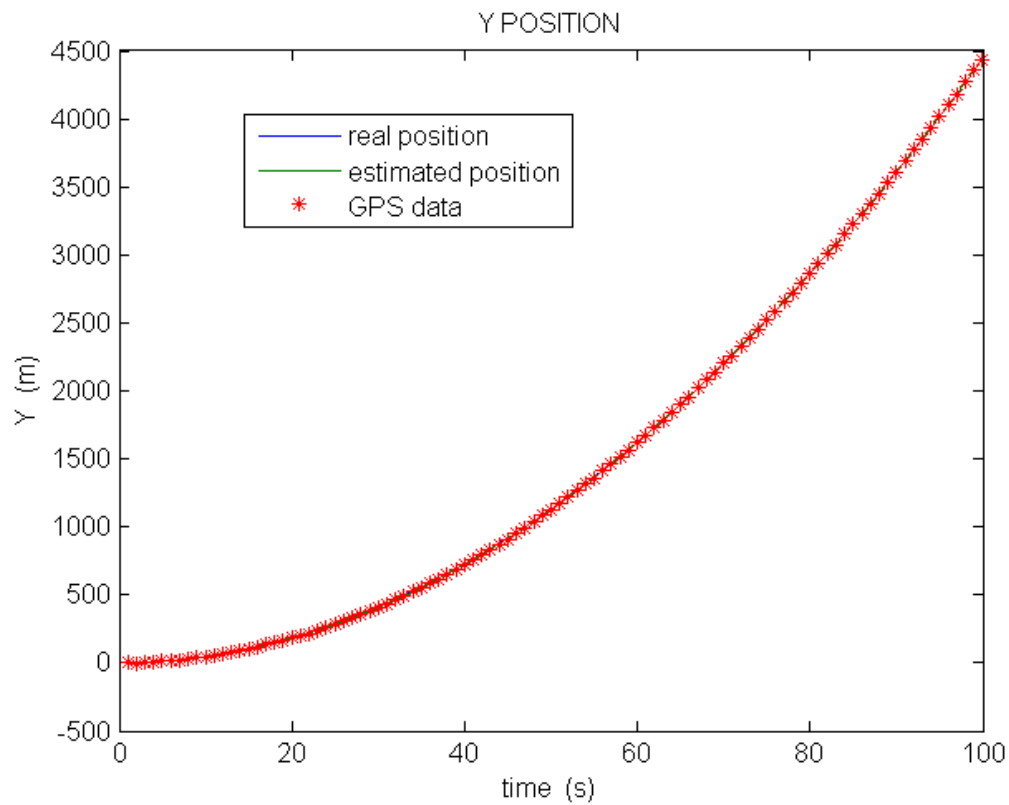


Fig. 16 Deviazione del missile in assenza di sistema di guida

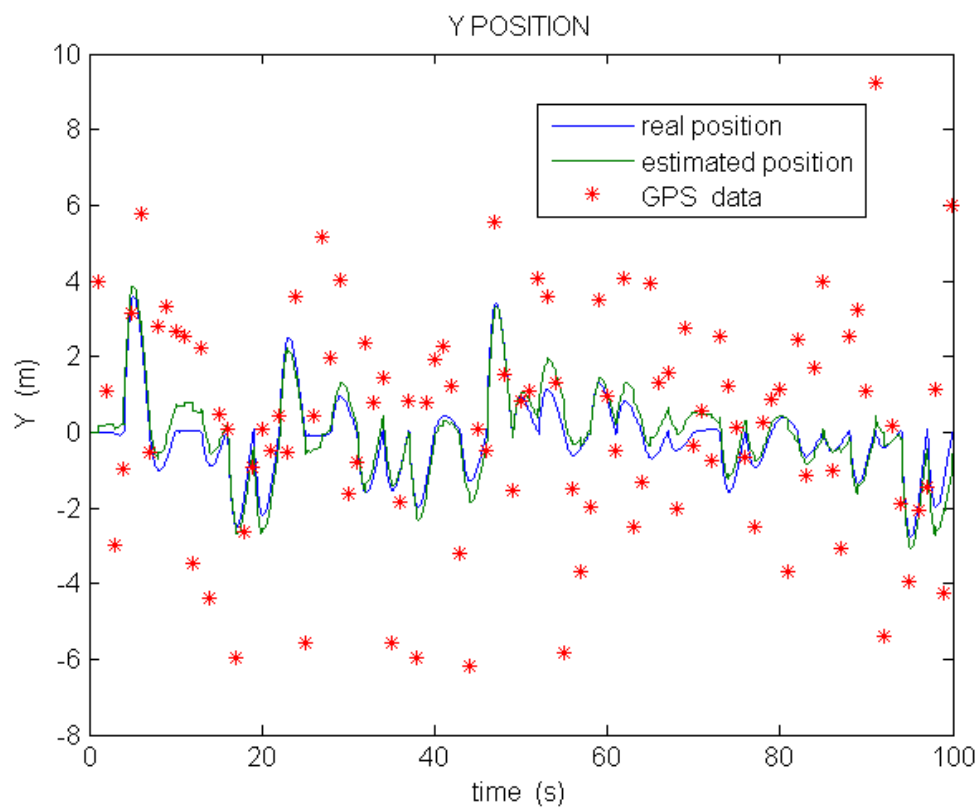


Fig. 17 Posizione del missile in dotato di sistema di guida

# Bibliografia

A. Caporali, *Il GPS e le sue applicazioni*, lucidi e dispense del corso.

G. Welch G. Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, North Carolina, 24 July 2006.

H. QI J. B. Moore, *Direct Kalman Filtering Approach for GPS/INS Integration*, IEEE transactions on Aerospace and Electronic systems vol. 38 no.2, April 2002.

Paul Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, third edition, Cambridge Massachusetts AIAA volume, 1997